

# Símplices

Un  **$k$ -símplice**  $\sigma$  es el cierre convexo de un conjunto  $S = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$  de puntos afinmente independientes de  $\mathbb{R}^n$ , esto es:

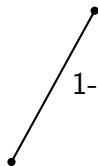
$$\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_k] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i, 0 \leq \lambda_i, \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1\}.$$

Los puntos de  $S$  son los vértices de  $\sigma$  (se denota  $S = V(\sigma)$ ).

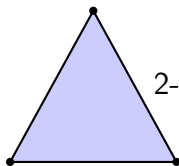
La dimensión de  $\sigma$  es  $k$  ( $\dim(\sigma) = k$ ).

## Ejemplos.

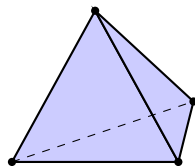
• 0-símplice



1-símplice



2-símplice



3-símplice

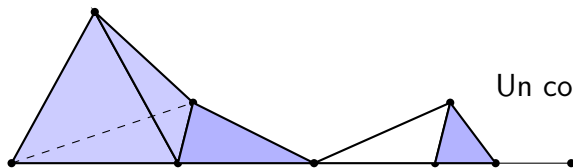
**Observación:**  $[v_0, v_1, \dots, v_k]$  también se denotará como  $\overline{v_0 v_1 \dots v_k}$ .

Se dice que  $\tau$  es una cara de  $\sigma$  ( $\tau \leq \sigma$ ) si  $V(\tau) \subset \tau(\sigma)$ . En particular  $\sigma \leq \sigma$ .

## Complejos simpliciales

Un **complejo simplicial**  $K$  es un conjunto finito de símplexes tal que:

- a) Si  $\sigma \in K$  y  $\tau \leq \sigma \Rightarrow \tau \in K$   
(si un símplex está en  $K$  también lo están todas sus caras),
- b) Si  $\sigma, \sigma' \in K \Rightarrow \sigma \cap \sigma' \leq \sigma$  y  $\sigma \cap \sigma' \leq \sigma'$   
(si dos símplexes de  $K$  se intersectan lo hacen por una cara común).



Un complejo simplicial

La dimensión de  $K$  es  $\dim K = \max\{\dim \sigma \mid \sigma \in K\}$ .

La unión de todos los símplexes con la topología de subespacio de  $\mathbb{R}^n$  se denota  $|K|$ .

Una **triangulación** de un espacio topológico  $X$  es un complejo simplicial  $K$  tal que  $X$  es homeomorfo a  $|K|$ .

## Grupos de cadenas

Sea  $K$  un complejo simplicial. El  $k$ -ésimo grupo de cadenas de  $K$  es el grupo libre abeliano  $(C_k(K), +)$  de los  $k$ -símplices orientados, donde  $\sigma = -\tau$  si tienen los mismos vértices pero orientaciones opuestas.

Un elemento de  $C_k(K)$  es una  $k$ -cadena,  $\sum_{i=1}^n k_i \sigma_i$ ,  $k_i \in \mathbb{Z}$ ,  $\sigma_i \in K$ .

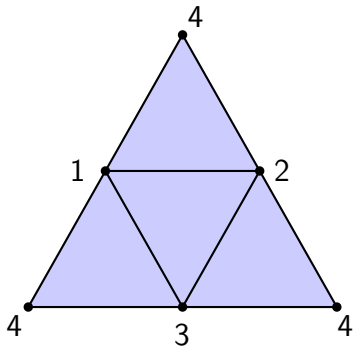
Un complejo simplicial tiene un grupo de cadenas en cada dimensión.

Si  $n \leq 0$  o  $n > \dim(K)$ ,  $C_n(K) = \{0\}$

**Ejemplo.** Si  $K$  es un tetraedro, podemos especificar los grupos de cadenas dando familias de generadores:

- $C_0(K) = \langle \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4} \rangle$
- $C_1(K) = \langle \bar{12}, \bar{13}, \bar{14}, \bar{23}, \bar{24}, \bar{34} \rangle$
- $C_2(K) = \langle \bar{123}, \bar{134}, \bar{124}, \bar{234} \rangle$
- $C_3(K) = \langle \bar{1234} \rangle$  (si el tetraedro está relleno)

**Observación.** Aunque no es totalmente correcto, pues faltaría añadir las relaciones que garantizan la conmutatividad, en este tema denotaremos por  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  al grupo abeliano libre generado por  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$



## Homomorfismo borde

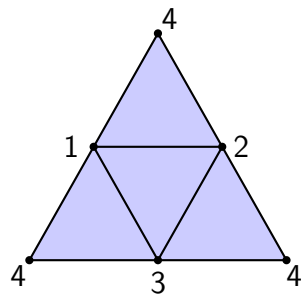
Sea  $K$  un complejo simplicial. El **homomorfismo borde**  $\partial_k : C_k(K) \longrightarrow C_{k-1}(K)$  se define como  $\partial_k \sigma = \sum_i (-1)^i [v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k]$ , donde  $\hat{v}_i$  indica que  $v_i$  es eliminado de la lista.

En particular, los bordes de los símplices de dimensión 1, 2 y 3 son:

- $\partial_1(\overline{ab}) = \overline{b} - \overline{a}$  (que denotaremos simplemente como  $b - a$ ).
- $\partial_2(\overline{abc}) = \overline{bc} - \overline{ac} + \overline{ab} = \overline{bc} + \overline{ca} + \overline{ab}$ .
- $\partial_3(\overline{abcd}) = \overline{bcd} - \overline{acd} + \overline{abd} - \overline{abc}$ .

**Ejemplo:** Si  $K$  es un tetraedro relleno:

- $\partial_0(\overline{1}) = 0$
- $\partial_1(\overline{12}) = \overline{2} - \overline{1}$
- $\partial_2(\overline{123}) = \overline{23} - \overline{13} + \overline{12} = \overline{23} + \overline{31} + \overline{12}$
- $\partial_3(\overline{1234}) = \overline{234} - \overline{134} + \overline{124} - \overline{123}$   
 $= \overline{234} + \overline{143} + \overline{124} + \overline{132}$



Obs rvese que  $\partial_1 \partial_2(\overline{123}) = \partial_1(\overline{23} + \overline{31} + \overline{12}) = \overline{3} - \overline{2} + \overline{1} - \overline{3} + \overline{2} - \overline{1} = 0$ .

## Homomorfismo borde

**Teorema.**  $\partial_{k-1}\partial_k = 0$ , para todo  $k$ .

**Demostración.** Sea  $[v_0, v_1, \dots, v_k] \in C_k(K)$ . Entonces:

$$\begin{aligned}\partial_{k-1}\partial_k[v_0, v_1, \dots, v_k] &= \partial_{k-1}\left(\sum_i (-1)^i [v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k]\right) \\ &= \sum_i (-1)^i \partial_{k-1}([v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k]) \\ &= \sum_{j < i} (-1)^i (-1)^j [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k] \\ &\quad + \sum_{j > i} (-1)^i (-1)^{j-1} [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_k] = 0.\end{aligned}$$

## El complejo de cadenas

Si  $\dim(K) = n$ , el **complejo de cadenas** de  $K$  es la sucesión de grupos y homomorfismos:

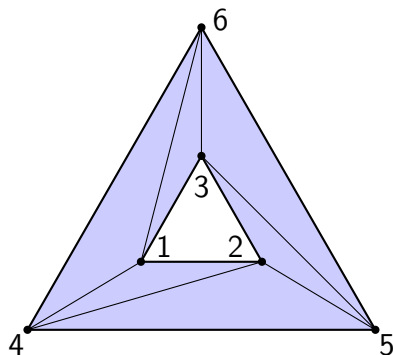
$$C_{n+1} = \{0\} \xrightarrow{\partial_{n+1} \equiv 0} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \xrightarrow{\partial_{n-2}} \cdots \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Para todo  $k$ , el grupo de  **$k$ -ciclos** es  $Z_k(K) = \{\sigma_k \in C_k \mid \partial_k(\sigma_k) = 0\} = \ker \partial_k$ , y el grupo de  **$k$ -bordes** es  $B_k(K) = \{\sigma_k \in C_k \mid \exists \tau_{k+1} \in C_{k+1} : \partial_{k+1}(\tau_{k+1}) = \sigma_k\} = \text{Im } \partial_{k+1}$ .

Como  $\partial_{k-1}\partial_k = 0$ , para todo  $k$ , se tiene  $B_k(K) \subseteq Z_k(K) \subseteq C_k(K)$ .

**Ejemplo.** Si  $K$  es un anillo:

- $\overline{12} + \overline{23} + \overline{31} \in Z_1$  porque  
 $\partial(\overline{12} + \overline{23} + \overline{31}) = \overline{2} - \overline{1} + \overline{3} - \overline{2} + \overline{1} - \overline{3}$
- $\overline{12} + \overline{23} + \overline{31} + \overline{54} + \overline{46} + \overline{65} \in B_1$  porque  
 $\partial(\overline{124} + \overline{254} + \overline{235} + \overline{536} + \overline{163} + \overline{146}) =$   
 $\overline{24} - \overline{14} + \overline{12} + \overline{54} - \overline{24} + \overline{25} + \overline{35} - \overline{25} + \overline{23} +$   
 $\overline{36} - \overline{56} + \overline{53} + \overline{63} - \overline{13} + \overline{16} + \overline{46} - \overline{16} + \overline{14}$



## Grupo de homología simplicial

El  $k$ -th grupo de homología de  $K$  es el grupo cociente  $H_k(K) = \frac{Z_k(K)}{B_k(K)} = \frac{\ker \partial_k}{\text{Im } \partial_{k+1}}$ .

Es decir, los elementos de  $H_k(K)$  son clases de equivalencia  $[z]$  con  $z \in Z_k(K)$ .

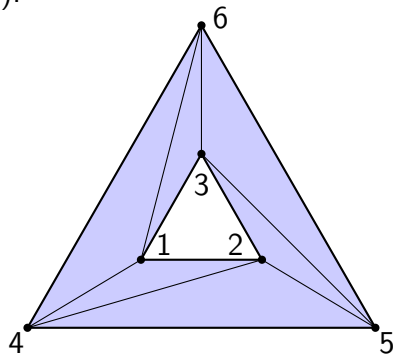
Se tiene que  $[z_1] = [z_2]$  si y solo si  $z_1 - z_2 \in B_k(K)$ .

Si  $[z_1] = [z_2]$  se dice que  $z_1$  y  $z_2$  son ciclos homólogos (se denota  $z_1 \sim z_2$ ).

El  $k$ -ésimo número de Betti de  $K$  es  $\beta_k(K) = \dim(H_k)$ .

**Ejemplo.** Si  $K$  es un anillo ( $\overline{123} \notin K$ ):

- $\overline{12} + \overline{23} + \overline{31} \in Z_k(K)$
- $\overline{45} + \overline{56} + \overline{64} \in Z_k(K)$
- $\overline{12} + \overline{23} + \overline{31} \sim \overline{45} + \overline{56} + \overline{64}$   
porque  $(\overline{12} + \overline{23} + \overline{31}) - (\overline{45} + \overline{56} + \overline{64}) =$   
 $\overline{12} + \overline{23} + \overline{31} + \overline{54} + \overline{46} + \overline{65} \in B_k$ .

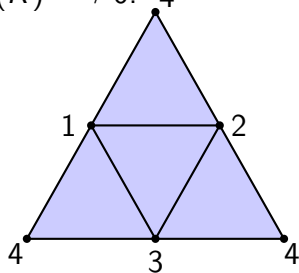


## Algoritmo para calcular los números de Betti

Si  $K$  es un tetraedro, tenemos  $0 \xrightarrow{\partial_3} C_2(K) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0$ .

Consideramos primero  $C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0$  cuya tabla es:

$\partial_1$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{34}$
$\overline{1}$	-1	-1	-1	0	0	0
$\overline{2}$	1	0	0	-1	-1	0
$\overline{3}$	0	1	0	1	0	-1
$\overline{4}$	0	0	1	0	1	1



donde, haciendo operaciones elementales por filas y columnas queda:

-1	-1	-1	0	0	0		1	0	0	-1	-1	0		1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	-1	-1	0		0	1	0	1	0	-1		0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	-1	→	0	0	1	0	1	1	→	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1		0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0	0

Luego  $\dim \operatorname{Im} \partial_1 = 3$ ,  $\dim \ker \partial_1 = 3$

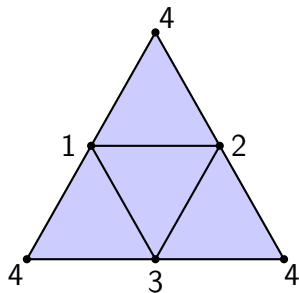
Concretamente,  $B_0 = \operatorname{Im} \partial_1 \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ,  $C_1 = \ker \partial_1 \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$



## Algoritmo para calcular los números de Betti

Consideramos ahora  $C_2(K) \xrightarrow{\partial_2} C_1$  cuya tabla es:

$\partial_2$	$\overline{123}$	$\overline{124}$	$\overline{134}$	$\overline{234}$
$\overline{12}$	1	1	0	0
$\overline{13}$	-1	0	1	0
$\overline{14}$	0	-1	-1	0
$\overline{23}$	1	0	0	1
$\overline{24}$	0	1	0	-1
$\overline{34}$	0	0	1	1



donde, haciendo operaciones elementales por filas y columnas queda:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \dim \operatorname{Im} \partial_2 = 3, \dim \ker \partial_2 = 1.$$

En concreto,  $B_1 = \operatorname{Im} \partial_2 \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ,  $Z_2 = \ker \partial_2 \simeq \mathbb{Z}$

## Algoritmo para calcular los números de Betti

Así, si  $K$  es un tetraedro, en  $0 \xrightarrow{\partial_3} C_2(K) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0$  se tiene:

- $\dim \operatorname{Im} \partial_0 = 0$ ,  $\dim \ker \partial_0 = 4$ ,  $Z_0 = C_0 \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- $\dim \operatorname{Im} \partial_1 = 3$ ,  $\dim \ker \partial_1 = 3$ ,  $B_0 \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ,  $Z_1 \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- $\dim \operatorname{Im} \partial_2 = 3$ ,  $\dim \ker \partial_2 = 1$ ,  $B_1 \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ,  $Z_2 \simeq \mathbb{Z}$
- $\dim \operatorname{Im} \partial_3 = 0$ ,  $\dim \ker \partial_3 = 0$ ,  $B_2 \simeq \{0\}$

Por tanto,

$$\beta_0(K) = \dim H_0(K) = \dim \left( \frac{Z_0(K)}{B_0(K)} \right) = \dim(\ker \partial_0) - \dim(\operatorname{Im} \partial_1) = 4 - 3 = 1$$

$$\beta_1(K) = \dim H_1(K) = \dim \left( \frac{Z_1(K)}{B_1(K)} \right) = \dim(\ker \partial_1) - \dim(\operatorname{Im} \partial_2) = 3 - 3 = 0$$

$$\beta_2(K) = \dim H_2(K) = \dim \left( \frac{Z_2(K)}{B_2(K)} \right) = \dim(\ker \partial_2) - \dim(\operatorname{Im} \partial_3) = 1 - 0 = 1$$

Luego,

$$H_0(K) \simeq (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) / (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z},$$

$$H_1(K) \simeq (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) / (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \simeq \{0\},$$

$$H_2(K) \simeq \mathbb{Z} / \{0\} \simeq \mathbb{Z}.$$

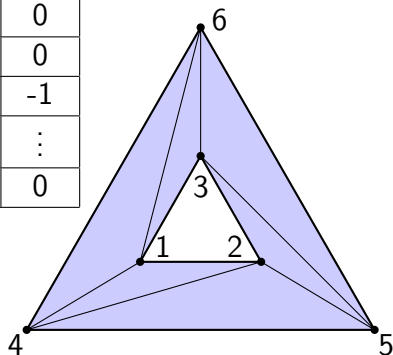
## Algoritmo para calcular los números de Betti

Si  $K$  es un anillo,  $0 \xrightarrow{\partial_3} C_2(K) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0$ .

$\partial_1$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\dots$	$\overline{45}$	$\overline{56}$
$\overline{1}$	-1	-1	-1	$\dots$	0	0
$\overline{2}$	1	0	0	$\dots$	0	0
$\overline{3}$	0	1	0	$\dots$	0	0
$\overline{4}$	0	0	1	$\dots$	-1	0
$\overline{5}$	0	0	0	$\dots$	0	-1
$\overline{6}$	0	0	0	$\dots$	1	1

$\partial_2$	$\overline{142}$	$\overline{245}$	$\dots$	$\overline{164}$
$\overline{12}$	1	0	$\dots$	0
$\overline{13}$	0	0	$\dots$	0
$\overline{14}$	1	0	$\dots$	-1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$\overline{56}$	0	0	$\dots$	0

- dim ker  $\partial_0 = \dim C_0(K) = 6$ ,
- dim Im  $\partial_1 = 5$ , dim ker  $\partial_1 = 7$ ,
- dim Im  $\partial_2 = 6$ , dim ker  $\partial_2 = 0$



$$\beta_0(K) = \dim H_0(K) = \dim Z_0(K) - \dim B_0(K) = \dim(\ker \partial_0) - \dim(\operatorname{Im} \partial_1) = 6 - 5 = 1$$

$$\beta_1(K) = \dim H_1(K) = \dim Z_1(K) - \dim B_1(K) = \dim(\ker \partial_1) - \dim(\operatorname{Im} \partial_2) = 7 - 6 = 1$$

$$\beta_2(K) = \dim H_2(K) = \dim Z_2(K) - \dim B_2(K) = \dim(\ker \partial_2) - \dim(\operatorname{Im} \partial_3) = 0 - 0 = 0$$

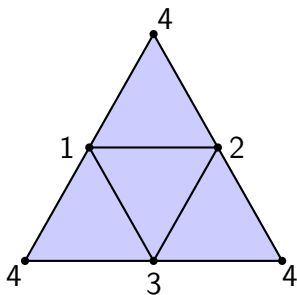
$$H_0(K) \simeq \mathbb{Z}, H_1(K) = \mathbb{Z}, H_2(K) = \{0\}.$$

## Significado topológico de los números de Betti

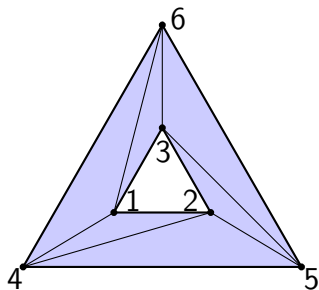
Los números de Betti tienen un significado intuitivo:

- $\beta_0$  coincide con el número de componente conexas.
- $\beta_1$  coincide con el número de túneles.
- $\beta_2$  coincide con el número de cavidades.

En los ejemplos que hemos visto



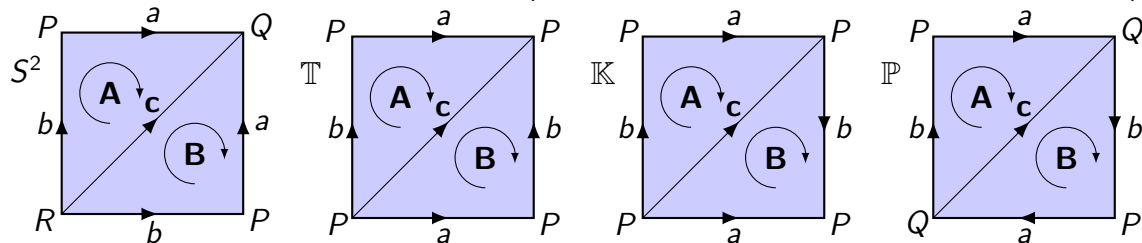
$$\beta_0 = 1, \beta_1 = 0, \beta_2 = 1$$



$$\beta_0 = 1, \beta_1 = 1, \beta_2 = 0$$

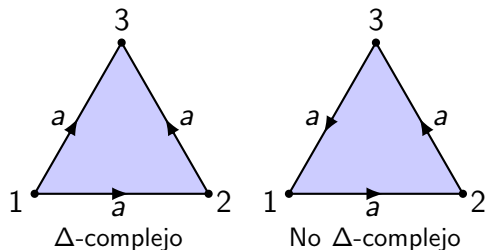
## $\Delta$ -complejos simpliciales

Si en un **complejo simplicial**  $K$  permitimos que dos símplex tengan más de una cara común o que en un símplex se identifiquen varias caras obtenemos una estructura más general llamada  **$\Delta$ -complejo simplicial** (en este caso no basta con etiquetar los vértices).



Para pegar caras de un mismo símplex se ordenan los vértices del símplex y el pegado de las caras ha de respetar las ordenaciones de sus vértices.

**Observación.** Los grupos de homología se pueden calcular a partir de estructuras de  $\Delta$ -complejo simplicial.



## Grupos de homología de la botella de Klein

Consideramos ahora un  $\delta$ -complejo sobre la botella de Klein, donde  $0 \xrightarrow{\partial_3} C_2(K) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0$  tiene las matrices

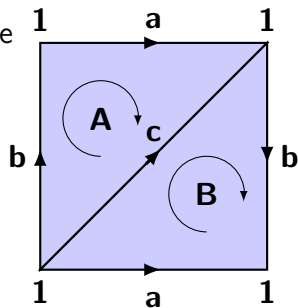
$$\begin{array}{|c|c|} \hline \partial_0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \rightarrow \boxed{0} \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \partial_1 & a & b & c \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \rightarrow \boxed{0 \ 0 \ 0}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \partial_2 & A & B \\ \hline a & 1 & -1 \\ b & 1 & 1 \\ c & -1 & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Entonces  $\begin{cases} \dim \ker \partial_0 = \dim C_0(K) = 1 & \beta_0(K) = 1 - 0 = 1 \text{ (1 componente)} \\ \dim \operatorname{Im} \partial_1 = 0, \dim \ker \partial_1 = 3 & \beta_1(K) = 3 - 2 = 1 \text{ (1 tunel)} \\ \dim \operatorname{Im} \partial_2 = 2, \dim \ker \partial_2 = 0 & \beta_2(K) = 0 - 0 = 0 \text{ (0 cavidades)} \end{cases}$

Y los grupos de homología son  $H_0(K) = \frac{\ker \partial_0}{\operatorname{Im} \partial_1} = \frac{\mathbb{Z}}{\{0\}} \simeq \mathbb{Z},$

$$H_1(K) = \frac{\ker \partial_1}{\operatorname{Im} \partial_2} = \frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2, \quad H_2(K) = \frac{\ker \partial_2}{\operatorname{Im} \partial_3} = \frac{\{0\}}{\{0\}} \simeq \{0\}.$$



**Ejercicio.** Calcula los grupos de homología de  $\mathbb{T}$  y  $\mathbb{P}$  usando este algoritmo.

## Grupos de homología de algunos espacios y superficies

En general, los grupos de homología se descomponen en producto de  $\mathbb{Z}$ s y  $\mathbb{Z}_k$ s. El número de  $\mathbb{Z}$ s coincide con el número de Betti correspondiente  $\beta_k$ .

	$H_0$	$H_1$		$H_0$	$H_1$	$H_2$
$\{0\}$	$\mathbb{Z}$		$S^2$	$\mathbb{Z}$	$\{0\}$	$\mathbb{Z}$
$[0, 1]$	$\mathbb{Z}$	$\{0\}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
$S^1$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{P}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\{0\}$
$S^1 \vee S^1$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	$\mathbb{K}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$	$\{0\}$

Observa que, en todos los casos,

- $\beta_0$  coincide con el número de componente conexas.
  - $\beta_1$  coincide con el número de túneles.
  - $\beta_2$  coincide con el número de cavidades.
- Todos los espacios tienen una única componente conexa, luego  $\beta_0 = 1$ .
  - La esfera y el toro rodean una cavidad, luego  $\beta_2 = 1$ .
  - Las superficies no orientables tienen una cara y no encierran cavidad, luego  $\beta_2 = 0$ .
  - En  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{K}$  hay factores  $\mathbb{Z}_2$  porque hay ciclos  $a$  que no son bordes tales que  $2a$  sí lo es.

## Resultados finales

**Teorema.** Si  $X \sim Y$ , entonces  $H_k(K) \simeq H_k(Y)$  para todo  $k$ .

**Teorema.**  $H_1(K)$  coincide con  $\pi_1(K)$  abelianizado.

**Teorema.**  $\sum_i (-1)^i \beta_i = \chi(K)$ .

**Ejercicio.** Comprobar este último resultado con los ejemplos de la tabla anterior.

**Un recordatorio de álgebra.** Todo grupo abeliano finitamente generado  $G$  es isomorfo a un producto de grupos cíclicos de la forma  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{m_r}$ , donde  $m_i$  divide a  $m_{i+1}$  para  $i = 1, \dots, r-1$ .

Equivalentemente,  $G \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{(p_1)^{r_1}} \times \mathbb{Z}_{(p_2)^{r_2}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{(p_n)^{r_n}}$ , donde los  $p_i$  son primos no necesariamente distintos.